

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Дифференциальная геометрия и топология
<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Математика
	Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	2
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Программу составил: А.В. Клименко, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 12.02.2024

## Аннотация

В курсе будут изучено применение продвинутых методов дифференциальной геометрии и топологии. А именно, основные понятия и теории, гладкие многообразия с дополнительными структурами.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

- освоение основных современных методов дифференциальной геометрии и топологии.

#### Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в области дифференциальной геометрии;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в области дифференциальной геометрии;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических исследований в области дифференциальной геометрии.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-5 Способен участвовать в проведении фундаментальных и прикладных исследований и разработок, самостоятельно осваивать новые теоретические, в том числе, математические методы исследований и работать на современной экспериментальной научно-исследовательской, измерительно-аналитической и технологической аппаратуре	ОПК-5.1 Способен решать поставленные задачи в области теоретических и экспериментальных исследований и разработок
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- фундаментальные понятия, законы, теории части дифференциальной геометрии;
- современные проблемы соответствующих разделов дифференциальной геометрии;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач дифференциальной геометрии.

уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в области в устной и письменной форме.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач ( в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов;
- предметным языком дифференциальной геометрии и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Двойственное пространство к линейному пространству.	4	4		4
2	Когомологии де Рама.	4	4		4
3	Определение гладкого многообразия, многообразия с краем, подмногообразия.	4	4		4
4	Разбиение единицы.	4	4		4
5	Риманова метрика.	6	6		6
6	Связность на многообразии.	4	4		4
7	Тензоры в точке на многообразии.	4	4		4
Итого часов		30	30		30
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 3 (Осенний)

###### 1. Двойственное пространство к линейному пространству.

Дважды двойственное пространство. Двойственное линейное отображение. Тензорное произведение пространств: различные определения, их эквивалентность.

###### 2. Когомологии де Рама.

Теорема о совпадении действий в когомологиях для гомотопных отображений.

###### 3. Определение гладкого многообразия, многообразия с краем, подмногообразия.

Способы локального задания подмногообразий. Связность. Ориентируемость. Гладкие отображения многообразий.

###### 4. Разбиение единицы.

Интегрирование дифференциальных форм. Формула Стокса.

## 5. Риманова метрика.

Поднятие и опускание индекса. Существование на ориентируемом римановом многообразии формы объёма, согласованной с метрикой.

## 6. Связность на многообразии.

Символы Кристоффеля. Ковариантное дифференцирование: тензорность, формула Лейбница. Ковариантная производная вдоль векторного поля. Параллельный перенос вектора вдоль пути.

## 7. Тензоры в точке на многообразии.

Возможность переноса между образом и прообразом при гладком отображении многообразий. Гладкие тензорные поля.

# 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Стандартная учебная аудитория.

## 6. Перечень рекомендуемой литературы

### Основная литература

1. Курс дифференциальной геометрии и топологии [Текст] : [учебник для вузов] / А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко .— М. : Факториал Пресс, 2000 .— 448 с.

### Дополнительная литература

1. Линейная алгебра [Текст] : учебник для вузов / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк .— 3 - е изд., доп. — М. : Наука, 1984 .— 295 с.
2. Алгебра [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / С. Ленг ; пер. с англ. Е. С. Голда ; под ред. А. И. Кострикина .— М. : Мир, 1968 .— 564 с.

## 7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://dm.fizteh.ru>

## 8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

программный пакет Microsoft Office (Word, Excel, Powerpoint).

## 9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Математика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	<u>2</u>
<b>квалификация:</b>	бакалавр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Дифференцированный зачет	
<b>Разработчик:</b>	А.В. Клименко, канд. физ.-мат. наук, доцент

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-5 Способен участвовать в проведении фундаментальных и прикладных исследований и разработок, самостоятельно осваивать новые теоретические, в том числе, математические методы исследований и работать на современной экспериментальной научно-исследовательской, измерительно-аналитической и технологической аппаратуре	ОПК-5.1 Способен решать поставленные задачи в области теоретических и экспериментальных исследований и разработок
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Дифференциальная геометрия и топология» обучающийся должен:

### знать:

- фундаментальные понятия, законы, теории части дифференциальной геометрии;
- современные проблемы соответствующих разделов дифференциальной геометрии;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач дифференциальной геометрии.

### уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в области в устной и письменной форме.

### владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач ( в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов;
- предметным языком дифференциальной геометрии и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

1. Дважды двойственное пространство.
2. Двойственное линейное отображение.
3. Теорема о совпадении действий в когомологиях для гомотопных отображений.
4. Способы локального задания подмногообразий.
5. Гладкие отображения многообразий.

6. Формула Стокса.
7. Поднятие и опускание индекса.
8. Ковариантное дифференцирование.
9. Тензорность, формула Лейбница.
10. Гладкие тензорные поля.

#### 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Проективизация векторного пространства. Проективное пространство  $RP^n$ . Однородные координаты. Аффинные карты.
2. Двойственное пространство к линейному пространству. Дважды двойственное пространство. Двойственное линейное отображение.
3. Тензорное произведение пространств: различные определения, их эквивалентность.
4. Пространства  $Tens_p^q(V)$ . Операции над тензорами. Симметрирование и альтернирование. Пространства симметрических и кососимметрических тензоров. Операция внешнего произведения кососимметрических форм.
5. Определение гладкого многообразия, многообразия с краем, подмногообразия. Способы локального задания подмногообразий. Связность. Ориентируемость. Гладкие отображения многообразий. Погружения, вложения.
6. Касательное пространство. Базис в нём, задаваемый локальной системой координат. Индуцированное действие гладкого отображения многообразий на касательных пространствах.
7. Тензоры в точке на многообразии. Возможность переноса между образом и прообразом при гладком отображении многообразий. Гладкие тензорные поля.
8. Дифференциальные формы на многообразии. Операция дифференцирования. Её свойства (инвариантность,  $dd = 0$ , формула Лейбница, коммутирование с операцией обратного образа формы).
9. Разбиение единицы. Теорема Уитни о вложении.
10. Интегрирование дифференциальных форм. Формула Стокса.
11. Риманова метрика. Поднятие и опускание индекса. Существование на ориентируемом римановом многообразии формы объёма, согласованной с метрикой.

#### Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.